1

ZESTAW IV

1

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną i niech, dla $A \subset X$, d_A będzie funkcją określoną wzorem $d_A(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$.

(A) Wykazać, że jeśli $A, B \subset X$ i $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, to zbiór otwarty $U = \{x : d_A(x) < d_B(x)\}$ zawiera A i $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

(B) Wykazać, że zbiór $S \subset X$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$, jeśli S przecina U i $X \setminus U$, to S przecina też brzeg $\mathrm{bd}U = \overline{U} \setminus U$ zbioru U.

2

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (\tfrac{1}{n})^2, x \leqslant 0 \text{ lub } y \leqslant 0\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \tfrac{1}{n} \text{ oraz } 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Wykazać, że $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej.

3

Podać przykład domkniętego, spójnego zbioru w $\mathbb{R}^3$, który jest sumą przeliczalnie wielu parami rozłącznych niepustych zbiorów domkniętych (taki zbiór nie może być jednocześnie ograniczony).

Wskazówka. Niech $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną następująco: jeśli x należy do $[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$ i $m \leqslant n$, to $f_n(x) = n(x - \frac{1}{m+1})(\frac{1}{m} - x)$, dla pozostałych x, $f_n(x) = 0$. Zdefiniować $A_n = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1/n^2, x \leqslant 0 \text{ lub } y \leqslant 0\} \cup (\{(0,1/n)\} \times \mathbb{R}) \cup (\{(1/n, y, f_n(y)) : 0 \leqslant y \leqslant 1\})$ i rozpatrzyć $X = (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \cup \bigcup_n A_n$.

4

Wykazać, że w przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T})$, zstępujący ciąg domknietych zbiorów spójnych ma spójne przecięcie. Pokazać, że założenie zwartości jest istotne.

Wskazówka. Założyć, że przecięcie C ma rozkład $C = A \cup B$, gdzie A, B są domknięte, rozłączne i pokazać, że istnieją otwarte zbiory rozłączne U, V w X takie, że $A \subset U$ i $B \subset V$

5

Wykazać, że zwarta przestrzeń metryczna (X,d) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary punktów $a, b \in X$ i $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $a_1, \ldots a_n \in X$ takie, że $a_1 = a$, $a_n = b$ i $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ dla $i = 1, 2, \ldots n-1$.

6

Pokazać, że zbiór

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{1/n\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}([-1,0] \times \{1/n\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{-1/n\} \times [-1,0]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}([0,1] \times \{-1/n\})$

jest spójny, ale nie jest łukowo spójny.

7

Wykazać, że przestrzeń $X = \mathbb{R}^2 \setminus A$ powstała z usunięcia z płaszczyzny euklidesowej zbioru przeliczalnego A jest łukowo spójna.

8

Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą spójnymi przestrzeniami topologicznymi, niech $A \subset X$ i niech $f : X \setminus A \to Y$ (funkcja f nie musi być ciągła). Wykazać, że jeśli $\overline{A} = X$, to $S = A \times Y \cup \{(b, f(b)) : b \in (X \setminus A)\}$ jest spójnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.

9

Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią spójną, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - zwartą przestrzenią spójną i $f : U \to Y$ ciągłym przekształceniem określonym na otwartej podprzestrzeni przestrzeni X. Pokazać, że $S = (X \setminus U) \times Y \cup \{(u, f(u)) : u \in U\}$ jest spójnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Pokazać, że zarówno założenie zwartości Y, jak i ciągłości f jest istotne.

10 Wykazać, że w spójnej przestrzeni metryzowalnej, mającej co najmniej dwa punkty, każda kula jest nieprzeliczalna.

11 Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim spójnych przestrzeni metryzowalnych, z których każda ma co najmniej dwa punkty. Wykazać, że dopełnienie $(X \times Y) \setminus A$ dowolnego zbioru przeliczalnego jest spójne.
<u>Wskazówka.</u> Skorzystać z Zadania 10.

12 Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux, jeśli dla każdej pary punktów $s < t$ i liczby r leżącej między $f(s)$ i $f(t)$ istnieje $u \in [s, t]$ takie, że $f(u) = r$. Wykazać, że jeśli wykres $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny, to f ma własność Darboux.

13 (A) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją z własnością Darboux (zob. Zadanie 4.12). Wykazać, że jeśli dla każdego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}$ obcięcie $f \mid F : F \to \mathbb{R}$ jest ciągłe w pewnym punkcie, to wykres funkcji f jest spójny.
(B) Wykazać, że wykres pochodnej f' funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest spójny.
<u>Wskazówka.</u> Skorzystać z faktu, że pochodna f' ma własność Darboux, $f'(t) = \lim_n \frac{f(t+\frac{1}{n})-f(t)}{\frac{1}{n}}$, oraz z Zadania 15 z Zestawu II.

14 Ustawić wszystkie nietrywialne przedziały otwarte o końcach wymiernych na prostej $\mathbb{R}$ w ciąg $J_1, J_2, \ldots$, wybrać indukcyjnie zbiory Cantora $C_n \subset J_n \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1})$ i określić $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, żeby $f(t) \neq t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, oraz $f(C_n) = \mathbb{R}$. Pokazać, że f ma własność Darboux, ale nie ma spójnego wykresu.

15 Niech $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_{nm} = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{nm})$, $n, m = 1, 2, \ldots$ i niech

$$X = [0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup \{I(a_n, b_{nm}) : n, m = 1, 2, \ldots\},$$

gdzie $I(a, b)$ jest odcinkiem o końcach a, b na płaszczyźnie.

(A) Wykazać, że jeśli $U \subset X$ jest zbiorem spójnym, otwartym w podprzestrzeni X płaszczyzny i $(0, 0) \in U$, to $(1, 0) \in U$.
(B) Wykazać, że dla każdego otoczenia V punktu $(0, 0)$ w przestrzeni X istnieje spójne otoczenie tego punktu w X zawarte w V.

16 Znaleźć maksymalną liczbę parami niehomeomorficznych przestrzeni spójnych, z których każda jest podzbiorem płaszczyzny euklidesowej, będącym sumą nie więcej niż trzech domkniętych odcinków euklidesowych.

17 Dla każdej liczby całkowitej j, niech S_j będzie okręgiem na płaszczyźnie o środku w punkcie $(j, \frac{1}{3})$ i promieniu $\frac{1}{3}$, oraz $I_j = \{j\} \times [0, 1)$. Niech

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \bigcup_{j<0} S_j \cup \bigcup_{j \geqslant 0} I_j,$$

$$Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \bigcup_{j<0} S_j \cup I_0 \cup S_1 \cup \bigcup_{j>1} I_j,$$

będą podprzestrzeniami płaszczyzny euklidesowej. Wykazać, że istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie X na Y, istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie Y na X, ale przestrzenie X i Y nie są homeomorficzne.

18 Niech $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ będą ciągłymi przekształceniami przestrzeni spójnej $(X, \mathcal{T})$ w prostą rzeczywistą i $S_x = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : (s - f(x))^2 + (t - g(x))^2 = h(x)^2\}$. Wykazać, że $S = \bigcup_{x \in X} S_x$ jest spójnym podzbiorem płaszczyzny.

19 Niech $I = [0,1]$, $a_n \in I$, $n = 1, 2, \dots$ i niech X będzie zbiorem na płaszczyźnie euklidesowej opisanym formułą

$$X = I \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I \times \{\frac{1}{n}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \times [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}].$$

(A) Wykazać, że zbiór X jest spójny.

(B) Wykazać, że zbiór X jest łukowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny.

---

20 Niech $a = \{(0,0)\}$, $b = \{(1,0)\}$ i niech $X = \{a, b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej.

(A) Wyznaczyć składowe przestrzeni X.

(B) Wykazać, że X nie jest homeomorficzna z $Y = X \setminus \{a\}$. Czy X jest homeomorficzna z przestrzenią $Z = Y \cup \{(1/2, 0)\}$ rozpatrywaną jako podprzestrzeń płaszczyzny euklidesowej?

---

21 Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że zbiór $E(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant t\}$ jest domknięty w iloczynie kartezjańskim $(X, \mathcal{T})$ i prostej euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest półciągła z dołu.

---

22 Niech $f : A \to [1,2]$ będzie funkcją ciągłą na domkniętej podprzestrzeni przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że (zob. formułę 1.6 (1))

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \inf_{a\in A} \frac{f(a)\cdot d(x,a)}{d_A(x)}, & \text{jeśli } x \in X \setminus A, \\ f(x), & \text{jeśli } x \in A, \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą $\overline{f} : X \to [1,2]$, przedłużającą funkcję f.

<u>Wskazówka.</u> Niech $h_E(x) = \inf_{a\in E}(f(a)d(x,a))$, $E \subset A$. Dla ustalonego $p \in A$ i $\varepsilon > 0$ wybrać $r > 0$ tak, żeby $|f(a) - f(p)| \leqslant \varepsilon$ jeśli $a \in A \cap B(p,r) = C$. Zauważyć, że dla $x \in B(p, r/4)$, $h_{A\setminus C}(x) \geqslant 3r/4$, oraz $f(p)d(x,p) \leqslant r/2$, a więc $h_A(x) = h_C(x)$. Wywnioskowac stąd, że dla $x \in B(p, r/4) \setminus A$, mamy $(f(p) - \varepsilon)d_A(x) \leqslant h_A(x) = h_C(x) \leqslant (f(p) + \varepsilon)d_A(x)$, a zatem, ponieważ $h_A(x) = \overline{f}(x)d_A(x)$, $|\overline{f}(x) - \overline{f}(p)| \leqslant \varepsilon$. Ciągłość $\overline{f}$ w punktach $X \setminus A$ wyprowadzić z ciągłości h_A na $X \setminus A$. Szczegółowe uzasadnienie można znaleźć w książce J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, dowód Twierdzenia 4.5.1.

---

23 Niech $g : X \to [0,1]$ będzie funkcją półciągłą z dołu na przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że istnieją funkcje ciągłe $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$ na X takie, że $g(x) = \lim_n f_n(x)$, dla $x \in X$.

<u>Wskazówka.</u> Zauważyć, że jeśli c_i jest funkcją charakterystyczną zbioru $U_i = \{x : g(x) > \frac{i}{n}\}$, to $g - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}(c_1 + \dots + c_{n-1}) \leqslant g$ i sprawdzić, że c_i jest punktową granicą niemalejącego ciągu funkcji ciągłych $f_{im}(x) = \min(m \cdot d_{X\setminus U_i}(x), 1)$.

---

24 Dla funkcji ograniczonej $f : X \to \mathbb{R}$ określonej na przestrzeni metrycznej (X, d) przyjmijmy

$\check{f} = \lim_n \sup\{f(y) : y \in B(x, \frac{1}{n})\}$, $\quad \hat{f} = \lim_n \inf\{f(y) : y \in B(x, \frac{1}{n})\}$.

(A) Pokazać, że funkcja $\check{f}$ jest półciągła z góry, a funkcja $\hat{f}$ jest półciągła z dołu (półciągłość z góry $\check{f}$ oznacza, że $-\check{f}$ jest półciągła z dołu).

(B) Niech $g, h : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi na przestrzeni metrycznej (X, d) takimi, że $g \leqslant h$. Wykazać, że następujace warunki są równoważne:

(i) $\check{g} \leqslant \hat{h}$,

(ii) istnieje funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że $g \leqslant f \leqslant h$,

(iii) dla każdej pary liczb $a < b$, zbiory $\{x : g(x) > b\}$ i $\{x : h(x) < a\}$ mają rozłączne domknięcia.

<u>Wskazówka.</u> Dowodząc (i) $\to$ (ii) pokazać, że funkcja $\Phi(x) = [\check{g}(x), \hat{h}(x)]$ jest półciągła z dołu i skorzystać z twierdzenia Michaela o selekcjach.